第 20 講　ベクトルでの計算

20　次の各問いに答えよ．

(1)　平面上の点 P 及び定点 A，B に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$$

が成り立っているとき，点 P の軌跡を求めよ．

(2)　平面上の三角形 ABC に対して点 P が

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}\geqq\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}$$

を満たしているとき，点 P の描く図形を図示せよ．

(3)　平面上の点 P 及び定点 A_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{P}}|^2$ の最小値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第20講　ベクトルでの計算

20　次の各問いに答えよ．

(1)　平面上の点Pおよび定点A，Bに対して

$$8\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP} \leqq |\overrightarrow{AP}|^2 + 4|\overrightarrow{BP}|^2$$

が成り立っているとき，点Pの存在領域を求めよ．

(2)　平面上の三角形ABCに対して点Pが

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}$$

を満たしているとき，点Pの軌跡を求めよ．

(3)　n 個の正の実数の列 a_1，a_2，……，a_n と，それをでたらめに並べ替えた実数の列 b_1，b_2，……，b_n を考え，n 個の組 $(a_1,\ b_1)$，$(a_2,\ b_2)$，……，$(a_n,\ b_n)$ をつくる．これらを xy 平面上の点 P_1，P_2，……，P_n の座標とし，それぞれの点から，原点Oを通るある直線 l へ下ろした垂線の足を Q_1，Q_2，……，Q_n とする．このとき

$$D = \sum_{k=1}^{n} |\overrightarrow{\mathrm{Q}_k\mathrm{P}_k}|^2$$

の最小値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　点Aを中心とする半径ABの円の周及び内部

　　㋑　点Aを中心とする半径 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$AB の円の周及び内部

　　㋒　点Aを中心とする半径2ABの円の周及び内部

(2)　㋐　直線BCに垂直で点Aを通る直線　　㋑　直線ABに垂直で点Cを通る直線

　　㋒　直線CAに垂直で点Bを通る直線

(3)　㋐　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2$　　㋑　$\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2$　　㋒　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第20講　ベクトルでの計算

20　次の各問いに答えよ.

(1)　平面上の点 P 及び定点 A，B に対して

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=3|\overrightarrow{AP}|^2$$

が成り立っているとき，点 P の軌跡を求めよ.

(2)　平面上の三角形 ABC に対して点 P が

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}\geqq\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PC}$$

を満たしているとき，点 P の描く図形を図示せよ.

(3)　平面上の点 P 及び定点 A_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{A_kP}|^2$ の最小値を求めよ.

【答】 (1) 線分 AB を 1：5 に外分する点を中心とする半径 $\dfrac{1}{4}$AB の円　(2) 略

(3) $-\dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA_k}\right|^2+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{OA_k}|^2$

【解答】

(1)　与式より

$$\begin{aligned}3|\overrightarrow{AP}|^2-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}&=3|\overrightarrow{AP}|^2-\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})\\&=2|\overrightarrow{AP}|^2+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=2\left(\left|\overrightarrow{AP}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right|^2-\frac{1}{16}|\overrightarrow{AB}|^2\right)=0\end{aligned}$$

$$\therefore\quad\left|\overrightarrow{AP}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right|=\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|$$

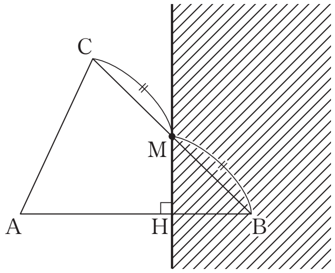
よって求める軌跡は，**線分 AB を 1：5 に外分する点を中心とする半径 $\dfrac{1}{4}$AB の円**.

(2)　与式より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PC}&=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})\\&=2\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AP}-\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right)\geqq0\end{aligned}$$

ここで，辺 BC の中点を M とするとこの式は $2\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM})\geqq0$　よって

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MP}\geqq0$ となるので，M から直線 AB に下ろした垂線の足を H とするとき，求める領域は直線 MH を含む下図斜線部分.



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　O を平面上の点として

$$\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{P}}|^2=\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}|^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}|^2)$$

$$=n|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\left(\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}|^2$$

$$=n\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}\right|^2-\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}\right|^2+\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}|^2$$

よって求める最小値は，$\boldsymbol{-\dfrac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}\right|^2+\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}|^2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 20 講　ベクトルでの計算

20　次の各問いに答えよ．

(1)　平面上の点 P 及び定点 A，B に対して

$$8\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP} \leqq |\overrightarrow{AP}|^2+4|\overrightarrow{BP}|^2$$

が成り立っているとき，点 P の存在領域を求めよ．

(2)　平面上の三角形 ABC に対して点 P が

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}$$

を満たしているとき，点 P の軌跡を求めよ．

(3)　n 個の正の実数の列 a_1，a_2，……，a_n と，それをでたらめに並べ替えた実数の列 b_1，b_2，……，b_n を考え，n 個の組 $(a_1,\ b_1)$，$(a_2,\ b_2)$，……，$(a_n,\ b_n)$ をつくる．これらを xy 平面上の点 P_1，P_2，……，P_n の座標とし，それぞれの点から，原点 O を通るある直線 l へ下ろした垂線の足を Q_1，Q_2，……，Q_n とする．このとき

$$D=\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{\mathrm{Q}_k\mathrm{P}_k}|^2$$

の最小値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　点 A を中心とする半径 AB の円の周及び内部

　　㋑　点 A を中心とする半径 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$AB の円の周及び内部

　　㋒　点 A を中心とする半径 2AB の円の周及び内部

(2)　㋐　直線 BC に垂直で点 A を通る直線　　㋑　直線 AB に垂直で点 C を通る直線

　　㋒　直線 CA に垂直で点 B を通る直線

(3)　㋐　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2$　　㋑　$\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2$　　㋒　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2$

【答】　(1) ㋑　(2) ㋐　(3) ㋑

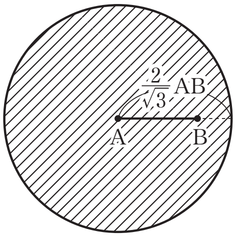
【解答】

(1)　$8\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP} \leqq |\overrightarrow{AP}|^2+4|\overrightarrow{BP}|^2$ より始点を A にそろえて整理すると

$$8\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}) \leqq |\overrightarrow{AP}|^2+4|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}|^2$$

$$8|\overrightarrow{AP}|^2-8\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} \leqq 5|\overrightarrow{AP}|^2-8\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+4|\overrightarrow{AB}|^2$$

$$|\overrightarrow{AP}|^2 \leqq \frac{4}{3}|\overrightarrow{AB}|^2$$



よって $|\overrightarrow{AP}| \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}|\overrightarrow{AB}|$ となるので，点 P の存在領域は

点 A を中心とする半径 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$AB の円の周及び内部.

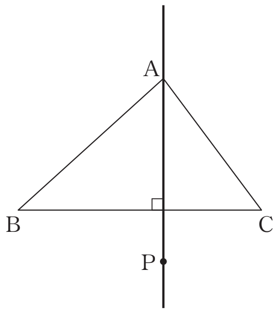
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}$ より $\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})$

よって $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$ となるので

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

ゆえに点Pの軌跡は，**直線BCに垂直で点Aを通る直線.**



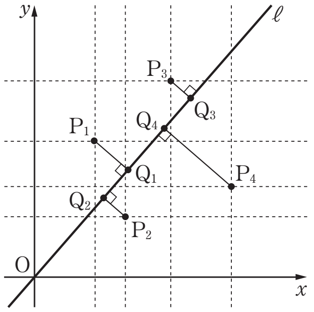
(3)　直線 l の大きさ1の方向ベクトルを $\vec{l}$ としたとき，実数 α_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を用いて $\overrightarrow{OQ_k}=\alpha_k\vec{l}$ と表せる．ここで

$$\overrightarrow{P_kQ_k}\cdot\vec{l}=(\overrightarrow{OQ_k}-\overrightarrow{OP_k})\cdot\vec{l}=(\alpha_k\vec{l}-\overrightarrow{OP_k})\cdot\vec{l}$$

$$=\alpha_k-\overrightarrow{OP_k}\cdot\vec{l}\qquad(|\vec{l}|^2=1\text{ より})$$

であり，$\overrightarrow{P_kQ_k}\perp\vec{l}$ よりこの値が0となるので，$\alpha_k=\overrightarrow{OP_k}\cdot\vec{l}$

このとき



$$D=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k\vec{l}-\overrightarrow{OP_k}|^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k{}^2|\vec{l}|^2-2\alpha_k\times\vec{l}\cdot\overrightarrow{OP_k}+|\overrightarrow{OP_k}|^2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-\alpha_k{}^2+|\overrightarrow{OP_k}|^2)$$

$$(|\vec{l}|^2=1,\ \vec{l}\cdot\overrightarrow{OP_k}=\alpha_k\text{ より})$$

ここで，$\vec{l}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0\leqq\theta<\pi)$ と表せ，

$\alpha_k=(a_k,\ b_k)\cdot(\cos\theta,\ \sin\theta)=a_k\cos\theta+b_k\sin\theta$ となるので

$$D=\sum_{k=1}^{n}\{-(a_k\cos\theta+b_k\sin\theta)^2+(a_k{}^2+b_k{}^2)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2\sin^2\theta+b_k{}^2\cos^2\theta-a_kb_k\sin2\theta)$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2\right)\sin^2\theta+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k{}^2\right)\cos^2\theta-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)\sin2\theta$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)\sin2\theta\qquad\left(\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2=\sum_{k=1}^{n}b_k{}^2\text{ より}\right)$$

となり，$0\leqq2\theta<2\pi$ より，$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき D が最小となるので，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2=\sum_{k=1}^{n}b_k{}^2$ に注意するとその最小値は

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2-\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(2a_k{}^2-2a_kb_k)=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。